Peut-on prendre des risques quand on n'est pas sûr de savoir ?

Juger pour agir depuis Condorcet

Pierre-Charles Pradier[i]

Prisme N° 16
Octobre 2009

[i] Pierre-Charles Pradier est maître de conférence à l'Université Paris-I (Panthéon-Sorbonne) et chercheur au Centre d'Économie de la Sorbonne (SAMOS-Marin Mersenne).

Résumé

Condorcet propose un principe de probabilité raisonnable : parmi les actions admissibles, on choisit d'écarter celles qui laissent une probabilité non négligeable aux risques dirimants. Ce principe guide aussi bien le développement de la connaissance que l'action elle-même. La mathématique développée par Laplace permet l'application effective du principe, dans la statistique mathématique (estimations ponctuelles assorties d'un seuil de confiance élevé) ou dans la gestion des compagnies d'assurances (calcul du taux de chargement permettant d'assurer la solvabilité de la compagnie). A la même époque, Tetens développe des idées voisines – avec toutefois moins d'efficacité mathématique. Ces idées du XVIII^e^ siècle s'appliquent encore, à la fois dans (l'interprétation de) certains modèles de décision contemporains, et dans les exigences informationnelles et légales qu'on doit imposer pour permettre aux décisions financières d'être rationnelles.

Les hommes des Lumières cherchaient à échapper à l'arbitraire en fondant la décision sur des principes simples et robustes. Condorcet et Laplace, par exemple, ont conçu un critère général pour prononcer des jugements valides et fonder l'action. Le philosophe Tetens a montré à la même époque comment ce critère devait mener à la certitude et agir. Ces idées ont si profondément marqué la statistique mathématique qu'elles sont devenues implicites, jusqu'à ce que la réflexion sur les fondements des statistiques mette à jour le fondement de Laplace. L'actualité du principe exposé par Condorcet est alors frappante.

Le principe de « probabilité raisonnable » de Condorcet permet de construire des raisonnements pour la décision qui résistent à l'incertitude. Ils sont d'ailleurs conformes aux recherches sur l'étymologie du mot risque comme à la théorie du portefeuille. Le texte présente dans un premier temps la relation entre l'application du « principe de probabilité raisonnable » et la théorie de la décision normative standard, il se concentre ensuite sur l'application des idées de Condorcet dans le contexte actuel. La pertinence de Condorcet aujourd'hui ne concerne pas tant ce que nous devons faire, que ce qu'il faut raisonnablement exiger.

1. Les Lumières du risque

A l'époque moderne, le calcul des probabilités se développe d'abord comme une règle de justice, avant que le *pari* de Pascal et la *Logique de Port-Royal* ne l'interprète comme une règle de décision. La polémique sur l'arbitraire des représentations de la décision conduit ainsi Condorcet à chercher les fondements indiscutables d'une décision raisonnable. La pertinence de l'espérance mathématique en la matière est en effet mise en doute par le *Problème* ou *Paradoxe de Petersbourg*[1], les autres règles (par exemple l'hypothèse de Bernoulli) semblent arbitraires dans leur énoncé ou dans leur spécification (*cf.* par exemple Jallais–Pradier–Teira [2008]). A la fin du siècle, la recherche d'un principe incontestable aboutit enfin et les applications immédiates sont nombreuses.

A. Le principe de certitude

La notion de quasi-certitude, déjà attestée dans les années 1660[2], est exprimée par Buffon qui définit la « probabilité morale nulle ». Constatant que la chance de mourir dans la journée pour un homme d'âge mûr est d'un dix-millième, sans que cela obère la journée du bonhomme, Buffon propose de compter pour nulles les probabilités plus faibles[3]. Cela permet, entre autres, de résoudre aisément le Problème de Petersbourg. Condorcet pour sa part préfère parler de « forte assurance »[4] : au-delà de l'animosité qui l'opposait au biologiste[5], la position de Buffon apparaît trop simple. En effet, Condorcet considère que plusieurs catégories de risques sont pertinentes dans la décision économique :

> « Un homme raisonnable ne doit se livrer au commerce que dans le cas où il trouve une probabilité assez grande qu'il retirera ses fonds, avec l'intérêt commun & le prix de son travail.
>
> Il lui faudroit sans doute une probabilité à peine différente de la certitude de ne pas perdre la totalité de ses fonds, & même d'en conserver la partie qui est nécessaire à sa subsistance & à celle de sa famille ; & une probabilité encore très grande de ne pas les diminuer jusqu'à un certain point[6]. »

Aussi la *décision rationnelle d'entreprendre* suppose-t-elle la certitude morale[7] de ne pas faire faillite, mais aussi l'improbabilité d'un (ou de plusieurs) risque(s) dirimant(s)[8], ces deux critères constituent le « principe de probabilité raisonnable (pour entreprendre) ».

Comparer le risque propre à deux affaires en comparant ces probabilités respectives devrait ainsi permettre de décider suivant ce risque. Ceci pose divers problèmes. D'une part, Condorcet, l'inventeur du paradoxe[9] qui porte son nom propose trois métriques, sans indiquer laquelle préférer : dans des situations d'indécision où une stratégie domine suivant une métrique mais non suivant les autres. D'autre part, la détermination des seuils (en particulier dans l'estimation d'un certain point) ne repose apparemment sur aucun critère objectif. Condorcet propose une série de définitions conventionnelles, fondée sur l'observation des bonnes pratiques (Jallais-Pradier-Teira [2008]). Le développement de la théorie des « seuils » (terme pour lequel la langue anglaise distingue *disaster threshold* et *confidence level*) justifie la position de Condorcet. Aujourd'hui, les niveaux d'activité correspondant à la ruine et au point-mort (*disaster threshold*) sont aussi bien acceptés que les seuils de confiance de 99 % et 95 %.

Le problème de la concurrence des seuils est peut-être plus nouveau. Pour Condorcet, la décision procède d'abord par exclusion des stratégies non pertinentes, celles dont les risques ne sont pas d'une *improbabilité* raisonnable. Il faut ensuite appliquer sur les stratégies qui satisfont aux seuils « de probabilité raisonnable » un critère de décision, qui peut être, par exemple, la maximation de l'espérance. Cette dernière étape reste implicite chez Condorcet, qui se concentre plutôt sur l'édition des perspectives dominées.

B. Condorcet : la propagande des assurances

Le texte dans lequel Condorcet expose avec le plus de détail sa théorie des seuils est un article de l'*Encyclopédie méthodique* qui suscite des développements chez Laplace et Lacroix sur les assurances maritimes[10]. Il convient d'en rappeler le contenu afin de préciser le point de vue de son auteur.

Au milieu des années 1780, Condorcet déploie une activité intense pour promouvoir les assurances : il organise un prix de l'Académie des sciences ([1783][11]) et rédige des articles ([1784], [1785a], [1785b]) ou des notes restées inédites ([s. d.]). L'assurance maritime, qui existe déjà depuis plus de trois siècles, n'en avait pas besoin, mais les assurances agricoles (que l'auteur appelle de ses vœux) ne sont qu'à l'état de projet, tandis que la loi et la morale réprouvent encore dans les pays latins l'institution d'assurances sur la vie déjà développées en Angleterre. Si les lettres apocryphes ([1785a], [1785b]) popularisent une idée nouvelle et aventureuse, l'article « Assurances maritimes » de l'*Encyclopédie méthodique* expose la foi de Condorcet dans le *principe* même de l'assurance. Comme son titre ne l'indique pas, il vise en fait à promouvoir *toutes* les formes d'assurances. La modalité choisie pour convaincre les lecteurs est le calcul économique, appliqué tant à l'assureur qu'à l'assuré potentiel. Ce point mérite : Condorcet, comme avant lui Daniel Bernoulli [1731], met en équation aussi bien la compagnie d'assurance que ses clients, ce qui n'est plus le cas chez les auteurs suivants.

Du point de vue abstrait, le calcul est simple : Condorcet modélise un décideur confronté à *n* opérations identiques, qui se résolvent chacune en un échec ou un succès. Les probabilités des différents niveaux du résultat de l'assureur sont donc données par le tirage d'une loi binomiale. Dans la pratique, si la probabilité d'un échec est p, la probabilité d'avoir m échecs parmi n tirages est égale à $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$. On ne dispose pas pour autant d'une fonction de répartition explicite. Il est possible d'en bricoler une, en écrivant que si X est la variable binomiale qui désigne le nombre d'échecs parmi n tirages, alors $P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

Le calcul est d'autant plus lourd que l'inconnue est ici m : on veut calculer m pour une probabilité $P(X \leq m)$ donnée, correspondant au niveau de confiance désiré[12]. Il faut additionner les termes du binôme, ce qui est très fastidieux, rend pénible la lecture de l'article de Condorcet et réduit sa portée pratique à pas grand chose. Le but de la formalisation est avant tout de fixer le prix de vente de l'assurance afin de réduire la probabilité de faillite de l'assureur à une quantité moralement négligeable. Condorcet porte un regard nouveau sur la décision et son application dans la *théorie (mathématique) du risque*, qui vise à déterminer le taux de chargement nécessaire pour immuniser la compagnie d'assurance contre les conséquences d'une accumulation de sinistres. Faute d'outil mathématique adapté, le succès de Condorcet est partiel : il fonde le principe, mais la complexité analytique de la théorie la rend quasiment inutilisable.

Le *principe de probabilité raisonnable* de Condorcet appliqué à la gestion d'entreprise en général se résume donc ainsi : le taux de profit est fixé de manière à rendre la solvabilité presque sûre (ou *moralement certaine*). Avant de présenter les développements de la théorie de l'assurance, il faut rappeler que l'auteur relie cette question du risque à celle de l'estimation. La deuxième partie de l'article « Assurances maritimes » traite de la « probabilité des événements futurs d'après les événements passés » (ou, dans des termes propres à Laplace, de « la probabilité des causes constantes par les événements déjà observés »). L'auteur retourne ainsi à ses travaux des années 1770 sur la méthode bayésienne asymptotique, qu'il a mise au point avec Laplace[13], indépendamment de Bayes dont les français ne prennent connaissance que plus tard. Si les résultats de cette méthode bayésienne sont maigres[14], ils témoignent du souci de Condorcet de prendre en compte la nature *statistique* des données, au contraire de l'« objet frivole »[15] (« jeux de hasard » caractérisés par des probabilités *a priori*) où « les géomètres se bornèrent assez longtemps », avant lui, cela s'entend. Condorcet ne contrôle pas encore le degré de confiance des estimations, l'approche analogique des situations de décision économique et statistique n'est encore que latente.

C. Tetens : le risque de la caisse et ses applications

A peu près au même moment que Condorcet, Johannes Nikolaus Tetens, s'attaque aux mêmes problèmes : la théorie mathématique du risque et la question de l'estimation. Tetens construit une métrique de risque, le *Risico* (parfois dit *Risico der Casse* pour indiquer qu'il s'agit du risque auquel s'expose une « caisse » d'assurances). Celui-ci n'est ni l'erreur moyenne[16] comme le pense Borch ([1969], p. 1), ni le risque moyen linéaire[17] comme l'écrit Bohlmann–Poterin du Motel [1911], p. 577). Les subtilités d'écriture de Tetens ont eu raison de la patience de ses admirateurs. Inspiré par l'école combinatoire allemande, il décrit en effet les variables aléatoires par des polynômes, son calcul des probabilités repose donc sur des théorèmes d'algèbre déroutants. Dans un premier temps (§18-19), Tetens discute l'*espérance des écarts pour les issues inférieures à la moyenne*[18]. Le propos est illustré par le cas d'un dé à six faces numérotées de zéro à cinq. L'espérance d'une variable ainsi définie est de $\frac{5}{2}$, les issues inférieures à la moyenne sont 0, 1 et 2, donc les écarts $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Comme les issues sont équiprobables (parmi six possibilités), l'indicateur de risque vaut pour une telle loterie :

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

Dans le cas des loteries symétriques, c'est-à-dire de loteries dont les écarts à la moyenne sont égaux de part et d'autre de l'espérance, comme par exemple le jet d'un dé, erreur moyenne (divisée par deux) et indicateur de risque sont évidemment égaux, mais pas le risque moyen linéaire, puisqu'il n'y a pas de résultats négatifs. Si on soustrait à la variable aléatoire son espérance, le prix d'entrée dans le jeu, alors les trois mesures sont identiques. Si formellement on peut donc démontrer dans un cas particulier l'égalité de l'indicateur de dispersion de Tetens avec d'autres qui seront utilisés par la suite, il ne faut pas perdre de vue que Tetens ne s'en tient pas, *dans ses démonstrations*, à des loteries d'espérance nulle qui remplissent les conditions de cette identité des indices. L'erreur des commentateurs vient peut-être du fait que si les *exemples* sont toujours de ce genre puisque les rentes viagères sont vendues à leur espérance mathématique.

Si Tetens est resté dans la mémoire des actuaires pour avoir mis au point un concept (et une métrique) du risque de caisse, il faut quand même insister sur le caractère particulier de l'usage qui en est fait. Alors que Condorcet, Laplace et Lacroix admettent sans difficulté la nécessité d'un *chargement*, tant pour couvrir les frais de l'assureur que pour garantir sa sécurité (Condorcet [1784] ; Laplace [1812], pp. 439-440 ; Lacroix [1821], p. 233), Tetens se refuse à une telle pratique :

> « On voit [grâce à l'indicateur de risque] ce que la garantie à produire représente. Celui qui l'assume, ne peut, par la nature de la chose, rien exiger pour cela, pas plus que n'exigerait un joueur qui démarre un jeu de hasard avec un autre, sans qu'aucun n'ait un avantage. Il peut perdre autant que gagner et ne doit que se demander s'il est prêt à mettre en jeu une somme aussi importante.[19] »

Le principe de justice qui préside à la décision risquée, maintes fois réaffirmé depuis Pascal (*cf.* Jallais–Pradier [1997]), ne souffre donc pas d'exception pour Tetens. Ce point de vue résonne avec le caractère public des institutions germaniques : avec de tels principes, les sociétés d'assurance ne pouvaient être profitables ! Ni prétendre à la solvabilité ! Il fallait donc qu'elles soient subventionnées et garanties par l'État. On comprend donc pourquoi ces calculs intéressent à la fois les autorités (qui offrent le marché et la subvention) et les entrepreneurs potentiels. Ce détail mérite l'attention, n'en déplaise à Max Weber, car on y trouve des catholiques français étatistes plus à l'aise avec les affaires d'argent que leurs cousins germains luthériens.

Si le *Risico* de Tetens ne sert pas à calculer le chargement, quelle est donc son utilité ? L'idée de Tetens vient peut-être d'une suggestion d'Abraham de Moivre, qui écrit dans sa *Doctrine of Chances* :

> « 6. Le risque de perdre une somme est le contraire de l'espérance ; sa vraie mesure est le produit de la somme aventurée par la probabilité de la perte[20]. »

Tetens est manifestement marqué par Moivre. Le recours à la formule de Stirling s'accompagne d'une référence explicite (contrairement à l'usage du XVIIIe siècle) à Moivre [1730][21]. Les développements de Tetens sur le sujet pourraient être traités simplement comme un exercice mathématique visant à généraliser cette notion de risque à des variables aléatoires plus complexes que les variables de Bernoulli considérées par Moivre. L'abstraction des travaux de Tetens (à cause du détour par les fonctions génératrices, en particulier), montre par ailleurs un intérêt réel pour les pures questions d'algèbre et peut faire penser à un exercice de style. L'intérêt simultané du philosophe pour le risque de la caisse d'une part, et d'autre part le risque d'estimation, nous conduit à chercher une autre interprétation.

D. Le risque d'estimation

Tetens cherche à établir la valeur des tables de mortalité qui servent à calculer les rentes viagères. Il convient pour cela de considérer au moins mille observations pour obtenir une « erreur » (sur l'espérance) inférieure à une demi-année[22]. Il étudie donc le risque d'estimation par analogie avec le risque de l'action. Cette analogie pose un double problème. D'une part, l'étude de la variabilité n'est pas menée de manière satisfaisante : on dispose d'un intervalle de confiance mais il n'est pas associé à une probabilité ; si on calculait rétrospectivement la probabilité implicite à la méthode de Tetens, il apparaîtrait qu'elle est beaucoup trop faible pour prétendre à la « certitude morale »[23]. D'autre part, l'interprétation du résultat de Tetens est incertaine : compte tenu de l'usage qui est fait des tables de mortalité, faut-il 1000 observations *par classe d'âge* (et de chaque sexe), pour que les tables soient précises *à chaque âge* ? L'auteur n'apporte pas de réponse à ces questions.

Ces résultats paraissent donc symboliques : l'auteur pointe le problème de l'induction statistique sans le traiter vraiment. On peut objecter que, dans la mesure où nous avons complètement occulté les calculs de Tetens, l'argument de l'auteur est peut-être dénaturé. Mais la complexité de ces computations commande de les détailler ailleurs[24]. Si ces développements sont assez exotiques, ils prouvent que

Condorcet n'était pas seul à percevoir une parenté analogique entre savoir et action, soumis au même principe de probabilité raisonnable… En la matière, la *Théorie analytique*, conduit à franchir une étape supplémentaire en offrant la possibilité de contrôler dans l'action le niveau de probabilité du risque.

E. L'actuariat : théorie mathématique du risque

A une époque où les pragmatiques anglais ne s'embarrassent ni de dispersion (des résultats des compagnies d'assurances), ni d'erreurs d'échantillonnage (des tables de mortalité) (Pradier [2003]), Laplace, en revanche, aborde non seulement la problématique mais encore la modélisation même de Condorcet. Le chapitre de la *Théorie analytique* qu'il consacre aux « bénéfices dépendants de la probabilité des événements » futurs s'ouvre en rappelant le cadre de la réflexion de son devancier[25]. On retrouve des opérations identiques susceptibles d'un résultat binaire (succès/échec), donc un tirage binomial. La « méthode de Laplace » consiste de son côté en une approximation normale des variables binomiales :

la probabilité $P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ est donc approchée

par l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-np}{\sqrt{2npq}}} exp\ (-v^2)dv$.

Ceci ne semble pas constituer une simplification, mais dans la mesure où seule la borne supérieure d'intégration change, on peut utiliser une table de la loi de Laplace–Moivre (comme celle de Kramp [1799]) pour obtenir sans calcul les valeurs de l'intégrale. Le modèle de Condorcet devient donc utilisable. Il est possible de calculer rapidement le montant du chargement nécessaire étant donné le niveau de sécurité requis. Ce n'est pas tout. Laplace peut entrer dans des raffinements qui bénéficient de la nature de son outil : la « méthode de Laplace » [1785] repose d'abord sur une approximation analytique et non sur un théorème de convergence en probabilité (le fameux « théorème central limite » de Laplace [1810]). Au lieu de considérer seulement des tirages binaires (échec ou succès) identiques, l'auteur ménage d'abord la possibilité pour des variables différentes (des binomiales dont les probabilités ou les conséquences pourraient changer [1812], p. 430), puis des tirages multinomiaux ([1812], p. 432). Enfin, et ce point paraîtra aux lecteurs de Condorcet comme un hommage à son aîné disparu, Laplace en vient à déterminer les lois des événements futurs d'après les événements passés ([1812], p. 434), c'est-à-dire qu'il propose lui aussi une estimation bayésienne des fréquences, au lieu des probabilités *a priori* dont la littérature assurantielle se contentait d'ordinaire.

A ce point, on serait tenté de croire que l'apport de Laplace à la question traitée par Condorcet réside uniquement dans l'emploi de cette approximation normale. Mais le normand pousse plus avant la généralisation du propos de Condorcet, en autorisant la prise en compte de variables aléatoires plus complexes[26], il permet d'envisager la détermination *effective* du taux de chargement qu'il s'efforce de justifier[27]. Le même souci d'effectivité guide ses recherches sur l'estimation statistique. Une série des travaux démographiques (Laplace [1781], [1786]) avaient permis de définir la « méthode », cette approximation analytique dont on a vu le caractère instrumental et crucial dans l'intégration des conditions de sécurité. Précisons en quoi la mathématique développée pour l'estimation statistique - pour ce que nous appellerions les tests d'hypothèses - a pu servir à Laplace dans ses calculs assurantiels. Dans les tests d'hypothèses[28], on raisonne sur l'observation d'une caractéristique qualitative *binaire* (le sexe dans Laplace [1781], le fait de naître dans l'année[29] pour Laplace [1786]), les distributions considérées sont donc, là encore, binomiales. Ces tests d'hypothèses consistent à s'interroger sur la probabilité qu'une fréquence réelle soit éloignée de son estimation sur un échantillon. La forme analytique du problème est l'étude d'une variable dont la loi de probabilité est de la forme[30] $\dfrac{C_{p'}^{q'}\displaystyle\int_0^1 x^q(1-x)^{p-q}x^{q'+1}(1-x)^{p'-q'}dx}{\displaystyle\int_0^1 x^q(1-x)^{p-q}dx}$. Approcher cette quantité permet ensuite d'étudier avec la même approximation toute variable binomiale. Il est faux de croire que la problématique générale de la dispersion (qui s'applique dans les questions d'assurance) est explicite chez Laplace. C'est bien l'analogie *mathématique*, l'analogie entre des formes fonctionnelles identiques – et certainement pas une analogie de type conceptuel, qui consisterait à rechercher des domaines d'application pour une théorie de la dispersion préexistante – qui conduit l'auteur à utiliser les mêmes outils[31].

Pour conclure sur Laplace, constatons donc qu'il applique le *principe de probabilité raisonnable* de Condorcet comme critère de gestion pour les activités économiques et comme critère de certitude morale dans l'estimation statistique. L'intérêt particulier de ce dernier point est qu'il conduit à la cristallisation de seuils de probabilité conventionnels de la statistique mathématique à venir.

2. Les séquelles laplaciennes

Laplace nous éblouit tant par la généralité du lien qu'il établit entre connaissance et action dans l'incertitude, que par la précision de sa réponse aux questions ouvertes par Condorcet. Après Laplace, la théorie mathématique du risque se développe plus dans ses aspects gestionnaires que dans ses fondements épistémiques. L'œuvre de S.-F. Lacroix (Pradier [2003]) montre bien cette focalisation sur les aspects pratiques. Les contributions à la théorie de la décision de Lacroix, Laplace et Tetens sombrent dans l'oubli : Tetens n'est plus connu que des actuaires (cf. Bohlmann ou Godfrey Hardy dans son cours à l'*Institute of Actuaries* en 1908), et pour un peu, on jurerait que Laplace n'intéresse que les géodésiens, les actuaires (une importante revue de littérature est présentée par Cramèr [1930]) ou les historiens des sciences. En fait, les principes condorcétiens ont mis en forme la statistique mathématique, et il n'est qu'à gratter un peu pour trouver le substrat laplacien des sols arables.

A. Les spéculations de finance

Dans un article de 1952, A. Roy insiste sur le fait que les financiers réclament des méthodes rudimentaires et prêtes à l'emploi et non des théories sur un autre monde. Pour cela, l'anglais considère un programme de maximisation du revenu avec une contrainte de « sécurité » : il impose une très grande probabilité (95%) que le revenu dépasse un minimum donné[32]. On retrouve donc le *principe de probabilité raisonnable* de Condorcet – ici baptisé *safety-first principle.* Deux différences apparaissent toutefois avec le modèle de Condorcet : d'une part le seuil de sécurité conventionnel est fixé en référence aux tests statistiques qui sont d'un usage général. La pratique a donc créé des habitudes. D'autre part, au lieu de considérer directement les distributions des rendements, Roy simplifie les calculs en recourant à l'inégalité de Bienaymé–Tchébycheff[33]. Au final, la décision économique s'exprime donc en termes, d'espérance et de variance puisque Roy dessine la courbe représentant les couples optimaux en termes de rendement et de risque : il donne l'expression analytique de ce qu'on appelle après Markowitz [1956] la « frontière efficiente ». Toutefois, comme le remarque Bernstein [1992], p. 60, « [Roy] a eu la malchance de publier son article […] trois mois après la publication de celui de Markowitz dans le *Journal of Finance* ». Sa contribution si directement condorcétienne a donc été éclipsée par l'œuvre du financier américain.

On considère parfois Harry Markowitz comme le père d'une théorie de la décision risquée (dite « espérance-variance ») fondée sur une représentation des variables aléatoires en termes de moments. En retrouvant l'origine de ces représentations, Pradier [2000] a montré combien l'héritage Laplacien était dissimulé chez Markowitz. Pourtant la comparaison avec A. D. Roy rappelle le point de départ identique : le principe de probabilité raisonnable pour entreprendre. Markowitz cherche à résoudre le problème suivant : soit un certain nombre de titres financiers (des actions), caractérisés chacun par un rendement (mesuré par l'espérance) et un niveau de risque (variance), on veut trouver le portefeuille de rendement maximal pour un niveau de risque donné, ou le portefeuille de risque minimal pour un niveau de rendement donné (ces deux programmes sont en fait liés, on les dit *duaux* en programmation). La difficulté mathématique vient du caractère « quadratique » des programmes à résoudre : la variance est une moyenne de carrés, et il est bien plus complexe de manipuler des carrés que des fonctions *linéaires* (*i. e.* sans puissances) des variables. La véritable « innovation » de Markowitz ne réside donc pas dans une représentation des préférences risquées, mais dans la solution d'un problème purement calculatoire : il s'agit d'optimiser une fonction quadratique sous des contraintes linéaires. A l'époque où ce dernier écrit, au début des années cinquante, il est illusoire de penser appliquer effectivement l'analyse à de véritables données : il faut toute la puissance des ordinateurs de l'armée pour calculer les portefeuilles optimaux avec seulement une cinquantaine de titres !

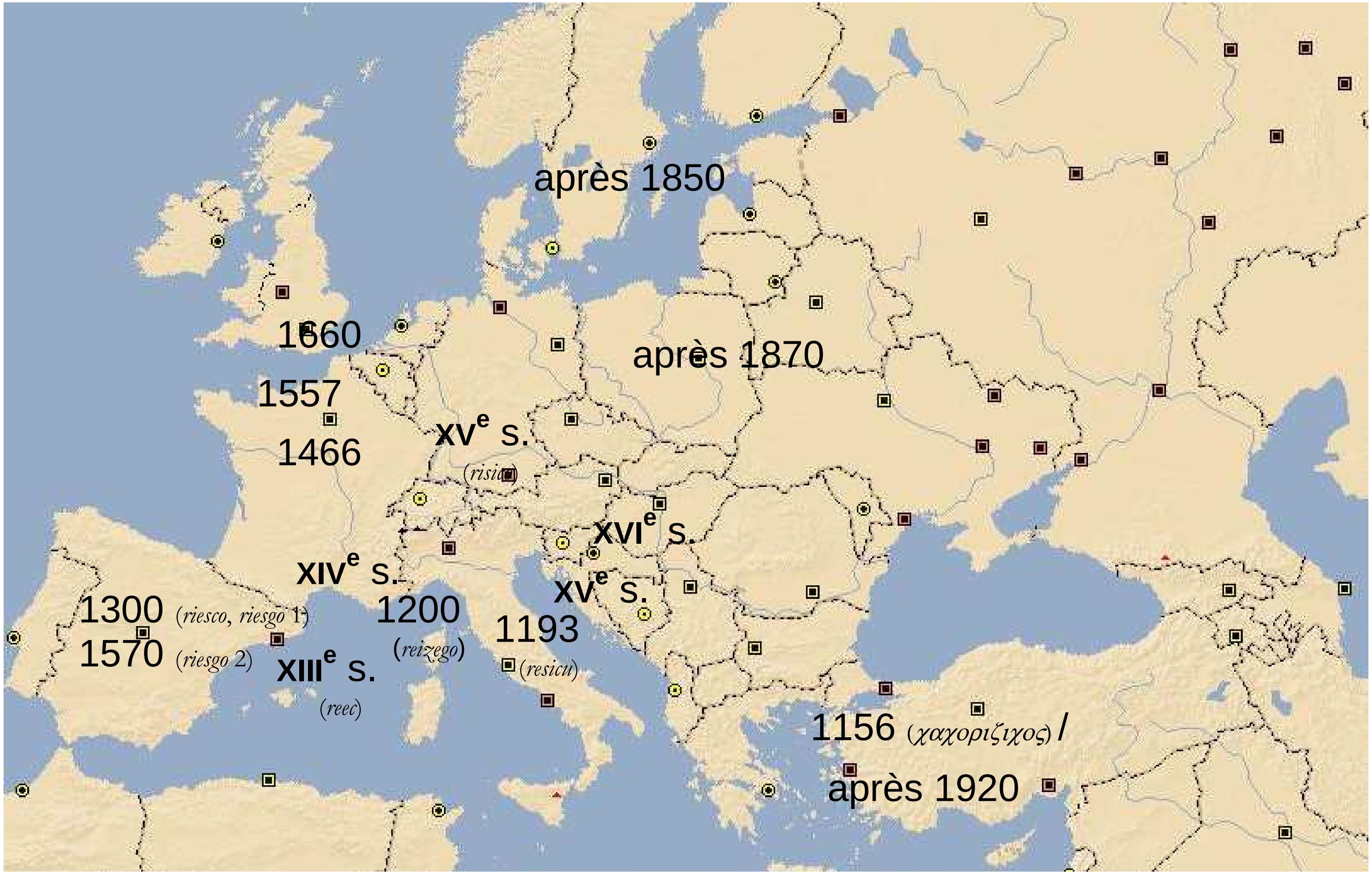

Figure 1 : La diffusion du mot *risque* en Europe

Même si elle paraît encore inapplicable, l'analyse de Markowitz donne une interprétation mathématique d'un très vieux principe, selon lequel « il ne faut pas mettre tous ses œufs dans le même panier ». En effet, la résolution du programme conduit à choisir des portefeuilles diversifiés (plutôt qu'à tout miser sur un seul titre). Cela n'est pas très nouveau : [Nicolas Bernoulli, 1731] résumait déjà l'article de son cousin Daniel par ces mots ! En revanche, la raison qui conduit à la diversification chez Markowitz mérite d'être expliquée : les corrélations imparfaites entre les titres permettent de comprendre pourquoi on a généralement intérêt à diversifier. Par exemple, face à une hausse des cours du pétrole, les compagnies pétrolières seront favorisées, quand les constructeurs automobiles verront leurs titres pénalisés ; typiquement ces valeurs devraient être corrélées négativement, il peut donc être intéressant de les détenir conjointement. Même des actifs dont la corrélation est positive mais pas complète vont mutuellement amortir leurs fluctuations, sans toutefois que les gains et les pertes ne se compensent complètement. Le fondement condorcétien est donc bien escamoté, il ne demande qu'à reparaître avec les applications agricoles du modèle de Markowitz[34].

B. *O fortunatos agricolas*

Si l'on s'attarde d'ordinaire sur les emprunts des économistes agricoles à Markowitz, il faut également insister sur le travail fondateur de Freund [1956]. Comme son titre l'indique (« *The introduction of risk into a programming model* »), ce texte s'attaque au même problème technique que Markowitz [1956] (et Simon [1956]). Freund choisit de maximiser une combinaison d'espérance et de variance (donc une fonction non-linéaire) sous des contraintes elles-mêmes linéaires. Encore une fois, Markowitz n'est ni le seul, ni visiblement le premier. Il peut au moins se prévaloir dans ce cas de la théorie générale du choix exprimée en termes de moments des variables aléatoires, alors que Freund retient une fonction d'utilité particulière. Il y a lieu de penser que l'avantage de Markowitz tient surtout à sa position à la RAND, à celle de son directeur de thèse à la Cowles, lieux où souffle l'esprit. En comparaison, le nom du North Carolina State College (où Freund a préparé sa thèse) suscite plutôt la condescendance : comme College, ce n'est pas une institution de recherche. Il faut donc voir *aussi* dans la réputation accordée à Markowitz un effet indéniable des institutions.

L'économie agricole ne jouit pas d'une grande publicité : Rudolf Freund a proposé une application du modèle de Markowitz à la détermination du programme de culture optimal pour une exploitation agricole[35] dès 1956, c'est-à-dire deux ans avant l'article considéré comme « fondateur » de Tobin. Pourtant Freund n'est jamais cité que par les économistes agricoles. Freund [1956] ne construit pas la frontière efficiente comme le fait Markowitz, mais dérive directement le « portefeuille de culture » optimal d'une fonction d'utilité pour les deux premiers moments du revenu total. En l'absence de frontière efficiente, le modèle de Freund paraît moins élégant que celui de Markowitz ; mais cette faiblesse assure la *compatibilité avec la théorie de l'utilité espérée*, que Markowitz, en butte aux critiques des économistes théoriciens, a mis trente ans à garantir. Quoi qu'il en soit, les spécialistes de l'économie agricole, à l'écart des modes, ont fait grand usage du modèle de Markowitz, et posé bon nombre de questions sur son statut théorique.

La discussion autour du modèle de Freund témoigne du faible intérêt des spécialistes de l'économie agricole pour l'unification théorique. En effet, ils n'ont pas souhaité s'engager dans la construction d'un cadre théorique de référence dont Mossin, Sharpe et Lintner ont doté la finance. L'emploi des formulations à la Markowitz pose en effet deux problèmes pour l'application : la frontière efficiente ne propose pas une lecture directe en termes de sécurité, et son calcul se révèle (comme on l'a vu) trop complexe.

Boussard [1969] s'est fait un des avocats du premier argument, en montrant que l'important n'est pas d'optimiser mais de savoir comment on optimise. Pour un ménage agricole qui choisit son plan de culture, le risque prend la forme d'un revenu inférieur à un certain seuil. C'est très exactement la formulation de Condorcet-Roy, que les auteurs ne citent pourtant pas. Comme lorsqu'au XVIIIe siècle Tetens et Condorcet travaillaient parallèlement sans le savoir, on doit s'interroger sur les raisons de cette concomitance. La réponse tient manifestement à l'intégration dans la culture des ingénieurs (y compris les ingénieurs agronomes) d'une statistique mathématique laplacienne. Sur le plan théorique, les modèles des agriculteurs perdent certainement en généralité par rapport à l'analyse de Markowitz, et la frontière efficiente disparaît, ce qui diminue « l'élégance » du résultat. A la place, on spécifie un seuil limite (analogue à la *Value-at-Risk* [VaR] des financiers), ce qui fait bien notre affaire. On observe ensuite les plans de production des ménages agricoles si on fait l'hypothèse qu'ils se comportent conformément au modèle et aux paramètres (prix, VaR) spécifiés.

La volonté de décrire les mécanismes de décision des agriculteurs n'est pas le seul facteur qui conduisit les économistes à prendre des libertés avec le modèle de Markowitz. A la même époque, Hazell constate que ce dernier est trop exigeant en matière de qualité de l'information et de traitement de cette information. Sur le premier point, l'auteur observe qu'il est difficile de supputer une matrice de variances-covariances, alors qu'on peut proposer quelques estimations de rendements[36]. Sur le second, il observe que la résolution d'un programme quadratique nécessite l'intervention d'un ordinateur de grande puissance (pour des raisons de précision[37]), alors qu'un programme linéaire se contente d'un opérateur formé à la méthode du simplexe[38]. Hazell propose donc de remplacer dans le programme de Markowitz la minimisation de la variance par la minimisation de l'écart moyen absolu (du revenu), d'où l'acronyme MOTAD (pour *Minimization Of Target Absolute Deviation*). Dans la perspective qui avait conduit à proposer la semi-variance, Hazell envisage également de considérer le seul écart moyen *négatif*, et montre que les calculs restent toujours aussi simples[39].

Le parti-pris simultané de la simplicité et de la robustesse nous ramène aux considérations fondamentales de Condorcet. On peut illustrer ces heuristiques robustes à l'incertitude par un exemple réflexif inédit.

C. La genèse du risque (divertissement)

Jusqu'à une époque récente, l'origine même du risque était douteuse. Les dictionnaires étymologiques proposaient une dizaine d'hypothèses (Pradier [1998] chap. 1), pourtant les autorités présentaient une thèse unique. Le grand sociologue allemand Niklas Luhmann pouvait ainsi écrire en 1990 que le concept de risque apparaissait au début de l'époque moderne « pour indiquer une situation problématique qui ne peut être décrite avec une précision suffisante par le vocabulaire existant » ([Luhmann 1990], p. 10). En fait de situation problématique nouvelle, on pense à rien moins que les grandes découvertes, la réforme religieuse, l'apparition du capitalisme, et le développement de la science moderne, liant ainsi comme Max Weber [1908] ces formes phénoménales du développement de l'Occident. Deux textes récents invitent à penser autrement l'héritage médiéval.

Sylvain Piron [2004] a mis la main sur le bon matériau historique, qui lui a permis de repérer la syllabe arabe *rizq* dans les cargaisons des marchands pisans quittant le port de Bougie : par eux le *resicum* s'est transmis à toute la chrétienté. Le risque suit donc le même chemin que les chiffres, à la même époque et dans un environnement culturel sensiblement identique (seuls les marchands qui comptent couramment trouvent un intérêt à ces chiffres arabes qui simplifient si considérablement les calculs). Piron retrace lui-même dans son article l'histoire improbable de sa découverte : bien que l'étymologie arabe ait été défendue dès 1863 par Marcel Devic, une série d'objections morphologiques et sémantiques avaient bloqué l'évidence et c'est une série d'articles de 1999-2002 qui ont convaincu Piron alors que les philologues erraient depuis plus d'un siècle. Finalement, un heureux hasard a conduit le travailleur infatigable vers la bonne source.

En 1998, aux balbutiements des corpus textuels numérisés et avant les articles pertinents cités par Piron, j'avais proposé une heuristique toute différente mais finalement assez robuste au risque d'échantillonnage. Au lieu de s'appuyer sur l'étymologie, il paraissait plus sûr de partir de ce qu'on connaissait (les premières occurrences documentées du mot). En consultant tous les dictionnaires étymologiques de la salle de lecture de la Bibliothèque nationale Richelieu, sans oublier le très précieux Boiteux [1968], on pouvait produire la carte de la page suivante. Elle montre clairement que le *risque* apparaît dans les langues européennes à partir de l'Italie, et qu'il se diffuse au long des routes commerciales. Comme c'est également le cas des épidémies, des modes et des réformes religieuses, on pourrait penser que cette diffusion n'indique rien sur la connotation originelle du terme risque. Sauf que la diffusion suit en premier lieu la voie maritime : elle est fulgurante au long de la côte Tyrrhénienne, moins rapide dans l'Adriatique, mais pas moins qu'au long des autres grandes routes commerciales. Le risque est donc un mot des marchands-marins, comme Piron l'a montré :

> « Le passage du *rizq* arabe au *resicum* latin, en tant que proche synonyme de *fortuna.* La nuance essentielle qu'introduit le néologisme, et qui explique sans doute son succès auprès des notaires italiens, tient à l'imputation qu'il permet à un sujet juridique. On le constate *a posteriori* en observant la spécialisation respective des deux termes dans les formulaires commerciaux. En règle générale, *fortuna* est référé à la providence divine dont on espère qu'elle accordera une issue favorable au voyage entrepris, tandis que *resicum* se rapporte au commanditaire assumant les conséquences financières de l'opération. Les deux notions n'en sont pas moins très proches, et il n'y a rien d'invraisemblable à ce que des marchands italiens aient adopté un terme arabe équivalent à *fortuna* mais mieux adapté aux besoins des formulaires commerciaux. »

La formulation générale (le néologisme traduit des usages nouveaux) rappelle celle de Luhmann, mais elle s'applique désormais à ce Moyen-âge qui a valu, outre les chiffres arabes et les prémisses du calcul des probabilités (Norbert Meusnier [2004]), les techniques de base de la finance que sont la comptabilité en partie double, la lettre de change et l'assurance. Reste donc à se doter d'outils pour concevoir le phénomène « risque ». C'est précisément ce qu'apporte la période moderne avec le développement de la méthode scientifique.

Cet exemple sans conséquence illustre (sans évidemment démontrer) l'idée d'heuristique robuste à l'incertitude. Tous les prédécesseurs de Piron ont échoué faute de trouver les documents qui prouvent leurs hypothèses. Cela confirme l'intuition selon laquelle la probabilité de trouver (par hasard) était très faible. Au contraire, l'heuristique qui consiste à chercher parmi ce qui est connu ne permettait pas de remonter sûrement à la source ultime, mais de caractériser très précisément la diffusion. Cet exemple permet d'introduire un premier élément de comparaison entre les théories contemporaines de la décision et le principe de probabilité raisonnable (qu'on a évoqué en parlant des agriculteurs) : l'exigence informationnelle. Précisons cette notion, et détaillons mieux la comparaison, afin de mieux comprendre le statut du principe condorcétien.

3. L'actualité de Condorcet

Avec le développement de la théorie de la décision depuis une soixantaine d'année, le principe de probabilité raisonnable a été soumis à un examen critique impitoyable. Des raisons *normatives* ont conduit à le discréditer : on peut toutefois montrer qu'il correspond à une interprétation possible de la décision rationnelle et que son application n'est pas si déraisonnable que les théoriciens ont voulu le laisser croire. Enfin, le point de vue de Condorcet témoigne plus que jamais des exigences minimales de la décision rationnelle.

A. La décision économique : théories normatives et descriptives

Les exemples empruntés à la finance et à l'économie agricole ont permis de montrer que les théories néo-condorcétiennes[40] ont une certaine pertinence descriptive en économie appliquée. Ils décrivent autant le processus décisionnel que le résultat de la décision des agents. Pour autant, ils paraissent en contradiction avec les modèles théoriques, qui reposent sur la théorie de l'espérance d'utilité : axiomatisée depuis le milieu des années 1940, celle-ci est considérée comme la *théorie normative de référence*[41]. En quoi est-elle normative ? En ce qu'elle exclut les comportements irrationnels que d'autres théories tolèrent : en particulier le *dutch book* et le *money pumping*. On décrit par ces expressions la possibilité d'exploiter les incohérences des choix afin d'extorquer aux agents réputés irrationnels le prix de leurs irrationalité, de manière statique (*dutch book* : ensemble de paris offerts à un décideur dont les probabilités subjectives ne sont pas additives) ou dynamique (*money pumping* – série de choix conduisant un décideur non maximisateur d'espérance d'utilité à des intransitivités). Ces catégories générales sophistiquées trouvent une expression unique dans le *contre-exemple de Borch* [1969]. Cet auteur a montré à l'aide d'un exemple, qu'il était impossible d'avoir des préférences raisonnables dans un plan espérance-variance : on a vu en citant Markowitz et Roy que c'était une représentation possible du principe de probabilité raisonnable.

Si la théorie de l'espérance d'utilité est normative au point de montrer que les autres sont déraisonnables, la démonstration ne convainc pas tout à fait. Le Paradoxe d'Allais [1979] a ouvert la voie aux travaux des psychologues comme Kahnemann, Slovic et Tversky : ceux-ci ont montré la prévalence de violations de la théorie « normative ». En fait, dès 1952, Maurice Allais avait conçu un dispositif expérimental pour réfuter empiriquement le caractère normatif de la théorie (Jallais-Pradier [2005]). En conséquence, les contraintes imposées aux décisions par l'espérance d'utilité ne se justifieraient que par une définition tautologique de la normativité. Cet argument ne vise pas à remettre en selle les théories héritées du principe de probabilité, dont la pertinence descriptive serait supérieure : les progrès dans la représentation des comportements ont conduit à l'émergence d'une nouvelle famille de théories dites *à dépendance de rang*, encore plus éloignées de la pensée de Condorcet. En revanche, les théories condorcétiennes, si elles ne prétendent pas représenter les choix des agents, sont efficaces pour représenter les procédures de décision elles-mêmes.

Comme on l'a vu chez les économistes agricoles, la pauvreté de l'information disponible ne permet souvent pas de disposer des *inputs* d'un modèle de décision en termes d'espérance d'utilité. On peut formuler autrement cette supériorité informationnelle du principe de décision raisonnable, en rappelant notamment l'efficacité de la variance comme statistique (Fisher [1920]), ou en montrant que les mesures de risque héritées de la théorie normative sont plus aisément sujettes à l'erreur que la variance (Pradier [1998], chapitre 6). Les exemples de décisions prises avec une information limitée et moins manipulable (que celle que présupposerait la théorie normative) ne manquent pas. On peut citer, en vrac : la validité des primes d'assurance maritime calculées au pif pendant des siècles, l'efficacité statistique de l'écart-type, et *a contrario* la difficulté de l'estimation fonctionnelle, ou simplement de l'estimation en incertitude d'une loi d'une variable aléatoire dont on peut convenir plus vraisemblablement d'un minimum, enfin la *Value-at-Risk* des financiers. Une lecture cursive pourrait alors laisser croire que les théories néo-condorcétiennes, bien que sujettes à des erreurs mortelles, seraient plus adaptées à (l'incertitude qui régit) la vie de tous les jours. Cette présentation, pour être simpliste, n'en mérite pas moins d'être approfondie.

B. La déraison métaphysique est physiquement raisonnable

Il convient d'abord de limiter l'opposition entre espérance d'utilité et théories néo-condorcétiennes : à en croire Maurice Allais [1979], c'est un combat homérique qui aurait opposé, dans les années cinquante, les partisans d'une théorie de la décision conforme aux faits et les tenants de « l'école américaine ». Allais a inventé « l'école américaine » (qui devait compter entre autres « américains » Edmond Malinvaud, Bruno de Finetti, Georges-Théodule Guilbaud et Georges Morlat) pour laisser supposer l'existence d'une *école française* dont il aurait été le chef de file après Pascal, Laplace, Poincaré et quelques autres. Cette opposition est une fiction (Jallais-Pradier [2005]). Il est plus intéressant de chercher les modalités de la compatibilité entre les théories, pour réduire ensuite les divergences restantes. Une première piste serait de considérer que la fonction d'utilité du décideur conduit à considérer les moments comme paramètres de décision : c'est le cas notamment pour les fonctions d'utilité quadratiques, dont les propriétés ont été explorées dès les années cinquante[42]. Malheureusement, l'hypothèse d'aversion pour le risque croissante[43] qui les sous-tend n'est pas vraisemblable, si bien que Markowitz qui avait d'abord considéré cette voie y a lui-même renoncé[44] (sauf à considérer des approximations en série de Taylor). Une autre solution consistait à ne considérer que des variables normales[45], avant que Meyer ne propose un critère d'équivalence plus général qui repose sur la comparaison des *densités* : la « condition de location et d'échelle[46] ».

Fort de ces prémisses, on pourrait conclure que le choix entre théorie normative et théorie néo-condorcétienne est une affaire de contexte ou d'interprétation. Les premiers garantissent des propriétés abstraites : qualités normatives, détermination analytique d'une solution (optimale). Les seconds sont intuitifs et correspondent à l'idée de décision dans un contexte de rationalité limitée (le *satisficing* d'Herbert Simon) : dès lors qu'on assure un (ou plusieurs) niveau(x) de sécurité, le choix d'une stratégie n'est plus nécessairement une maximation mais un choix entre alternatives dominantes (elles dominent celles qui n'offrent pas la sécurité requise). Le problème de cette représentation de la décision est que la sélection d'une stratégie repose sur des critères non élicités, ce qui exclut la modélisation du comportement des agents. On peut alors spécifier le principe de probabilité raisonnable dans une forme *à la Markowitz*, certes pas tout à fait satisfaisante (à cause du contre-exemple de Borch) mais qui reste admissible car la pertinence empirique du contre-exemple reste douteuse. En effet, dans les situations de décisions réelles, les variables de décision (les rendements) possèdent en général une forme « régulière » (Day [1965], Levy-Markowitz [1979], Kroll–Levy–Markowitz [1984], Pope–Ziemer [1984]). La théorie condorcétienne pourrait donc se voir opposer des contre-exemples de salon, mais elle est efficace dans l'action, alors que la théorie de l'utilité espérée, si elle représente une règle de décision parfaitement rationnelle, n'est pas toujours suivie par les décideurs, soit parce qu'elle ne peut rendre compte de certains comportements (paradoxe d'Allais, entre autres), soit parce qu'elle exige une qualité d'information ou un traitement d'icelle dont les agents sont incapables. L'opposition de la possibilité métaphysique (du contre-exemple) à l'impossibilité physique pour justifier une théorie simpliste et robuste apparaissait déjà chez D'Alembert (D'Alembert [1761], Rieucau [1998]).

4. Les problèmes du XXI^{e} siècle : la macrorobustesse au risque (en forme de conclusion)

N'est-il pas désespéré de vouloir réhabiliter un *principe de probabilité raisonnable* qui s'exprime en dernière analyse dans la VaR ? En effet, la VaR a contribué à la crise financière actuelle et montré combien elle était manipulable (Galichon [2008]). De plus, le développement de la responsabilité limitée a changé le point de vue des décideurs économiques sur leurs propres affaires. Dans la mesure où ils ne s'exposent plus à la ruine, ils sont enclins à prendre plus de risques. Si on ajoute l'accroissement de la taille des entreprises autorisée par la société par actions, et la déconnection entre propriété et contrôle, les problèmes de régulation économique paraissent insolubles : comme on l'a vu depuis l'été 2007, les gros risques jouent stratégiquement face aux autorités, avec un chantage à la faillite illustré par la récurrence de l'expression *too big to fail*. Evidemment, l'analyse condorcétienne paraît démunie devant ces problèmes macroéconomiques, d'autant plus que le marquis n'avait aucune idée des problèmes du risque moral comme en témoigne son projet d'*assurances agricoles* totalement non viable. Est-ce à dire que le modèle condorcétien a perdu toute pertinence ?

Non, car il est illusoire de penser que la réduction du risque agrégé peut être opérée en dehors de la vigilance des décideurs individuels. La vigilance individuelle au risque est donc un prérequis, et le devoir de l'État est en premier lieu d'établir un cadre cognitif et institutionnel qui permette l'accomplissement de la rationalité individuelle. Alors que le modèle de Condorcet est sans institution, l'activité économique contemporaine s'exerce à travers des médiations complexes : les apporteurs de capital, dont la responsabilité est limitée, ne sont pas décideurs dans la gestion quotidienne, et les règles comptables ne permettent pas nécessairement de fournir l'information nécessaire à la prise de décision. La référence au modèle de décision de Condorcet est toutefois importante car elle permet de comprendre les informations nécessaires à la prise de décision rationnelle : en particulier, les valeurs historiques et marchandes doivent coïncider, et les hypothèses probabilistes doivent être solides.

Ces deux conditions ne sont évidemment pas vérifiées dès lors que les conditions de marchés sont extrêmes, comme on a pu le voir dans la période récente. Idéalement, le régulateur devrait pouvoir forcer un retour aux valeurs historiques et « suspendre » la comptabilité en valeur de marché dès lors que la liquidité des instruments est insuffisante (cette décision devrait pouvoir être prise pour une catégorie d'instrument donnée). De même, la vérification de la validité des hypothèses probabilistes n'est pas très éloignée de l'idée de *stress tests ad hoc* décidés par les autorités de marché, toutefois de tels épisodes devraient pouvoir être déclenchés plus simplement. L'idée selon laquelle les pertes de LTCM sont dues à une déviation exceptionnelle, aussi exceptionnelle que la contagion des défauts des prêts *subprime* repose manifestement sur une représentation probabiliste erronée. De manière générale, la modélisation purement probabiliste du risque de défaut est une source d'ennuis qu'Irving Fisher avait parfaitement identifiée dès 1906 (« ce n'est pas seulement que le risque élevé rend le prêt coûteux : ces termes onéreux augmentent l'incertitude du paiement, et ainsi de suite dans un cercle vicieux[47] ») : les scores doivent être vraiment discriminant, et on peut à bon droit soupçonner les banques de chantage stratégique au TBTF…

Ainsi, la réglementation doit offrir au décideur les conditions de possibilité de la décision condorcétienne, mais ce n'est pas suffisant, puisqu'il faut aussi limiter l'aléa moral lié à la socialisation des pertes. Ici, le problème n'est pas tant d'éviter que les investisseurs crédules soient abusés par des malfaisants, que les conséquences macroéconomiques des comportements parfaitement rationnels à l'échelle individuelle. En la matière, on n'est d'autant plus embarrassé que le planificateur bienveillant est un fantasme du siècle des Lumières à Ramsey : personne ne sait ce que chacun devrait faire pour contribuer à l'harmonie générale. Reste donc à gérer les comportements stratégiques des agents : faillite de Lehman Brothers. On voit à quel point cette gestion est emprunte de discrétion (au sens qui se manifeste dans l'adjectif *discrétionnaire*), en l'absence de règle.

Le modèle de Condorcet reste un idéal qu'il convient de rendre possible. La démocratie repose sur les citoyens ; l'économie de marché sur les agents économiques rationnels.

Références

Allais, M. [1979], « The so-called Allais Paradox and rational decisions under uncertainty », *in* M. Allais and O. Hagen.

Bernoulli, D. [1731], « Specimen theoriae novae de mensura sortis », rééd. *in Die Werke von Daniel Bernoulli*, t. II, Basel, Birkäuser Verlag ; trad. angl. « Exposition of a new theory on the measurement of risk » *in Econometrica* XXI, pp. 223 sqq., 1954 : trad. fr. par Charreton R., notes de Bru B., « Esquisse d'une théorie nouvelle théorie de mesure du sort », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, VI, pp. 61-77.

Bernoulli, N. [1731], « Lettres à Daniel Bernoulli », *in Die Werke von Jakob Bernoulli*, t. III, Basel, Birkäuser Verlag, 1975.

Bernstein, P. L. [1992], *Des idées capitales — les origines improbables du Wall Street moderne*, New York : Free Press ; trad. fr. Paris : PUF [1995].

Bohlmann, G., Poterin du Motel H. [1911], « Technique de l'assurance sur la vie » *in* J. Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, tome I volume IV, Paris, rééd. Jacques Gabay.

Boiteux, L. -A. [1968], *La fortune de mer — le besoin de sécurité et les débuts de l'assurance maritime*, Paris : SEVPEN.

Borch K. H. [1969], « A note on uncertainty and indifference curves », *Review of Economic Studies* XXXVI, n° 1, 1-4.

Boussard, J.-M. [1969], « The introduction of risk into a programming model. Different criteria and actual behavior of farmers », *European Economic Review*, I, pp. 92-121.

Bru, B. [1988], « Estimations laplaciennes », *Journal de la société de statistique de Paris*, t. CXXIX, n° 1-2, pp. 6-45.

Cochran, W. G. [1977], *Sampling techniques*, 3rd ed., New York : Wiley.

Cochran, W. G. [1978], « Laplace's ratio estimator », pp. 3-10, *in* H. A. David (dir.), *Contributions to Survey Sampling and Applied Statistics*, New York : Academic Press ; rééd. *in* W. G. Cochran *Contributions to Statistics*, New York : Wiley.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [1783], « Manuscrit de Condorcet précisant le programme du prix », *in* [1994], p. 467.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [1784], « Assurances (maritimes) », *in Arithmétique politique — textes rares ou inédits* [1767-1789], Paris : INED, 1994, pp. 485-494.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [1785a], « Lettre de Bordeaux pour calculer les assurances contre les intempéries dans le domaine agricole », *in* [1994], pp. 469-471.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [1785b], « Réponse à la lettre de Bordeaux », *in* [1994], pp. 471-474.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [1785c], « Discours sur l'astronomie et le caclul des probabilités », *in* [1994], pp. 600-604.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [1994], *Arithmétique politique — textes rares ou inédits* (1767-1789), B. Bru et P. Crépel, éds., Paris : INED, 1994.

Condorcet, J. A. N. Caritat de [s. d.], « Des assurances contre les incendies », note autographe, *in* [1994], p. 477.

Cramér, H. [1930], « On the mathematical theory of risk », *Försäkringaktiebolaget Skandias Festskrift*, pp. 7-84.

Crépel, P. [1988], « Condorcet, la théorie des probabilités et les calculs financiers », *in* R. Rashed [1988], pp. 267-325.

D'Alembert, J. Le Rond [1761], « Dixième mémoire : réflexion sur le calcul des probabilités », *in* *Opuscules mathématiques*, **II**, pp. 1-25, Paris : David.

Day, R. [1965], « Probability distribution of field yield », *Journal of Farm Economics*, **XLVII**, pp. 713-741.

Fisher, I. [1906], *The Nature of Capital and Income*, éd. 1912, New York : Macmillan ; trad. fr. par Sylvain Bouyssy, Paris : Giard et Brière, 1911.

Fisher, R. A. [1920], « A mathematical examination of the methods of determining the accuracy of an observation by the mean error, and by the mean square error », *Royal Astronomical Society* (Monthly notes) LXXX, pp. 758-769.

Freund, R. [1956], « The introduction of risk into a programming model », *Econometrica*, **XXI**, pp. 253-263.

Galichon, A. [2008], "The VaR at risk", *Les cahiers de la chaire*.

Hazell, P. B. [1971], « A linear alternative to quadratic and semivariance programming for farm planning under uncertainty », *American Journal of Agricultural Economics*, **LIII** (1), pp. 53-62.

Israël, G. [1996], *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique*, Paris : Le Seuil.

Jallais S. et P. -C. Pradier [1997], « L'erreur de Daniel Bernoulli *ou* Pascal incompris », *Economie et Sociétés*, série P. E., n° 25, 1/1997, pp. 17-48.

Jallais S., P. -C.Pradier, et D.Teira [2008], "Facts, norms and expected utility functions", *History of the Human Sciences*, **21** (2), pp. 45-62.

Joyce, J. M. et R. C. Vogel [1970], « The uncertainty in risk : is variance ambiguous ? », *Journal of Finance*, **25** (1) (mars), pp. 127-134.

Kramp, C. [1799], *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Strasbourg : Dannbach.

Kroll, Y., H. Levy et H. M. Markowitz [1984], « Mean-variance versus direct utility maximization », *Journal of Finance*, **39** (1) (mars), pp. 47-61.

Lacroix, S. F. [1821], *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris : Bachelier.

Laplace, P. S. [1774], « Mémoire sur la probabilité des causes par les événements », *Mémoires de l'Académie Royale des sciences présentés par divers savans*, VI, pp. 621-656 ; rééd. *in* P. S. Laplace [1878-1912], **VIII**, pp. 27-65.

Laplace, P. S. [1781], « Mémoire sur les probabilités », *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1778), pp. 227-232 ; rééd. *in* P. S. Laplace [1878-1912], vol. IX, pp. 383-485.

Laplace, P. S. [1785], « Mémoire sur les approximations des formules qui sont des fonctions de très grands nombres », *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1782) ; rééd. *in* P. S. Laplace [1878-1912], **X**, pp. 209-291.

Laplace, P. S. [1786], « Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la France pendant les années 1781 et 1782 », *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1783), pp. 693-702 ; rééd. *in* P. S. Laplace [1878-1912], **IX**, pp. 35-46.

Laplace, P. S. [1810], « Mémoire sur les approximations des formules qui sont des fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités », *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* ; rééd. *in* P. S. Laplace [1878-1912], *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars, **XII**, pp. 301-353.

Laplace, P. S. [1812], *Théorie analytique des probabilités*, réed. *in* P. S. Laplace [1878-1912], *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars, **VII** ; réimp. Paris : Jacques Gabay, 1993.

Levy, H. et H. Markowitz [1979], « Approximating expected utility by a function of mean and variance », *American Economic Review*, **LXIX**, pp. 308-317.

Luhmann, N. [1990], *Soziologie des Risikos*, Berlin : de Gruyter ; éd. angl. *Risk : A Sociological Theory*, New York : de Gruyter.

Markowitz, H. M. [1952], « Portfolio selection », *Journal of Finance*, **VII**, pp. 77-91.

Markowitz, H. M. [1956], « The optimization of a quadratic function subjet to linear constraints », *Naval Research Logistics Quarterly*, **III**, pp. 111-133.

Markowitz, H. M. [1959], *Portfolio selection : efficient diversification of investment*, New Haven : Yale University Press, 2ème édition 1971.

Markowitz, H. M. [1987], "Mean-variance analysis", *in New Palgrave Dictionnary of Economics*.

Markowitz, H. M. [1991], "Foundations of portfolio theory", *Journal of Finance*, **XLVI** (2), pp. 469-477.

Meusnier, N. [2004], « Le problème des partis avant Pacioli », in E. Barbin et Jean-Pierre Lamarche, *Histoire de probabilités et de statistiques*.

Moivre, A. de [1725], *Annuities on lives*, London : W. Pearson ; rééd. New York : Chelsea, 1967.

Moivre, A. de [1730], *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London : Tonson and Watts.

Moivre, A. de [1756], *The Doctrine of Chances*, 3ème éd., London : W. Pearson ; rééd. New York : Chelsea, 1967.

Piron, S. [2004], « L'apparition du *resicum* en Méditerranéee occidentale, XII^{e}-XIII^{e} siècles », Strasbourg : Editions Histoire et Anthropologie, p. 59-76.

Pope, R. D. et R. F. Ziemer [1984], « Stochastic efficiency normality, normality, and sampling errors in agricultural risk analysis », *American Journal of Agricultural Economics*, **LXVI**, pp. 31-40.

Pradier, P. -C. [1998], *Concepts et mesures du risque en théorie économique — essai historique et critique*, Thèse ENS-Cachan.

Pradier, P. -C. [2000], « Le hasard fait bien les choses, histoire du docteur Markowitz », *Economie & Sociétés,* Œconomia, Histoire de la pensée économique, série P. E., n° 30, pp. 85-118.

Pradier, P. -C. [2003], « L'actuariat au siècle des Lumières, risque et décisions économiques et statistiques », *Revue économique*, **LIV** (1), pp. 139-156.

Pradier, P. -C. [200-], *Economie du risque*, Paris, La Découverte.

Rieucau, J. -N. [1998], « *Les entreprises ou les hommes s'exposent à une perte, dans la vue d'un profit* — Condorcet et l'héritage de D'Alembert », *Revue économique*, **XLIX** (5), pp. 1365-1405.

Roy, A. D. [1952], « Safety first and the holding of assets », *Econometrica*, **XX**, pp. 431-449.

Roy, A. D. [1961], « Review of *Portfolio Selection* », *American Economic Review*, **LI**, pp. 99-100.

Simon, H. A. [1956], « Dynamic programming under uncertainty with a quadratic criterion function », *Econometrica*, **XXXIII**, pp. 493-513.

Tetens, J. N. [1786], *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften — Zweyter Teil — Versuche über einige bey Versorgungs-Anstalten erhebliche Puncte*, Leipzig, Weidmanns Erben und Reich, 1786.

Tobin, J. [1958], « Liquidity preference as behavior toward risk », *Review of Economic Studies*, **XXV**, pp. 65-86.

Tsiang, S. C. [1972], « The rationale of the mean-standard deviation analysis, skewness, preference and the demand for money », *American Economic Review*, **LXII**, pp. 354-371.

Weber, M. [1908], *L'éthique protestante et l'esprit du capitalisme*, trad. fr. et rééd. Paris : Plon, 1985.

Notes

[1] On trouve dans Jallais-Pradier [1997] un récit plus développé. Précisons seulement que le *Problême de Pétersbourg* consiste à déterminer la mise pour participer au jeu suivant : « A jette en l'air une pièce de monoye, B s'engage à lui donner l'écu, si le côté de la Croix tombe le premier coup, 2, si ce n'est que le second, 4, si c'est le 3e coup, 8, si c'est le 4e, etc » L'espérance mathématique de la chance du joueur (appelons-la C) vaut :

$$C=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{2}(\ldots)\right)\right)\right)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\frac{1}{16}\times 8+\ldots$$

soit

$$C=\sum_{i=0}^{+\infty}2^{-(i+1)}\times 2^{i}=\sum_{i=0}^{+\infty}2^{-1}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2}=+\infty\ .$$

[2] Voir Rieucau [1997] : « Cette expression est relativement répandue lorsque Buffon l'emploie pour son propre compte. Dans son *Introduction à la philosophie* (1736, p. 128), notons que 's Gravesande estime qu'elle est d'usage "vulgaire". O. B. Sheynin [1977] rapporte à cet égard qu'on la trouve déjà chez des auteurs tels que Descartes, Huyghens, Leibniz ainsi que chez Jean et Nicolas Bernoulli. » On pourrait ajouter la *Logique de Port-Royal*. Ici toutefois, nous considérons le sens que lui donne Buffon et qui sera respecté par Condorcet.

[3] Buffon [1777], p. 38 : « Comme tout homme de cet âge (cinquante-six ans), où la raison a acquis toute sa maturité et l'expérience toute sa force, n'a néanmoins nulle crainte de la mort dans les vingt-quatre heures, quoiqu'il n'y ait que dix mille (...) à parier contre un, qu'il ne mourra pas dans ce court intervalle de temps ; j'en conclus que toute probabilité égale ou plus petite, doit être regardée comme nulle ».

[4] Condorcet [1785c], p. 23.

[5] Sur la haine entre les deux personnages, voir Rieucau [1995], p. 21 en particulier note 85.

[6] Condorcet [1784], p. 486.

[7] Voir Rieucau [1998]. Condorcet [1784], p. 492 propose de « savoir comment dans la pratique les hommes qui passent pour sages, & dont les projets ont réussi, ont résolu le même problème ; par exemple, quelle a été la probabilité de ne pas perdre que les assureurs ont su se procurer dans les différents bureaux d'*assurances* qui ont pu continuer le commerce avec avantage. » C'est donc une véritable *définition expérimentale* de la rationalité que Condorcet propose.

[8] En envisageant la probabilité des événements « retirer de son activité le profit normal », « ne pas perdre plus d'une certaine somme », « ne pas perdre tout son bien », Condorcet distingue trois « événements » dont le

premier inclut le deuxième, qui englobe lui-même le suivant. Le risque inhérent à l'activité économique admet alors trois niveaux : « avoir travaillé pour rien », « avoir perdu une somme considérable dans ses affaires » et « être ruiné » (ce sont les événements complémentaires de ceux que décrit Condorcet).

[9] On sait que le mot de *paradoxe* n'est pas de Condorcet (ni même de Borda), même si le marquis concède que le contenu en soit « paradoxal ». Voir sur ce sujet Rieucau [1997], Ch II, section 2, § 3, n. 102.

[10] Voir les travaux de Pierre Crépel [1988] et de Jean-Nicolas Rieucau [1998].

[11] Ce prix, proposé en 1781 par l'Académie des sciences à l'instigation de Condorcet, ne fut pas remis à la date prévue (1783) et finalement reporté deux fois. En 1787, Lacroix et Bicquilley partagèrent enfin ce prix. Il est donc vraisemblable qu'à cette date au moins, Laplace n'avait pas vraiment avancé dans le sujet.

[12] Le lecteur désireux de retrouver l'intégralité des calculs pourra se reporter au texte original, ou à Crépel [1988].

[13] Bernard Bru et Pierre Crépel [1994] pp. 256-60 *n.* ont largement éclairé la question des relations entre Bayes, Condorcet et Laplace.

[14] Le principe de l'estimation « bayésienne » est ici de considérer que si m vaisseaux ont péri et n n'ont point péri, la probabilité (« des événements futurs d'après les événements passés ») de succès est $\frac{m+1}{m+n+2}$. Voir Condorcet [1784], p. 491 ; Laplace [1774].

[15] Condorcet [1785c], p. 601.

[16] Soit une variable X d'espérance $\overline{x}$, présentant n issues x_i, $i \in [1, n]$ rangées par ordre croissant, dont les probabilités respectives sont p_i, il existe alors un plus grand n_0 tel que $\forall i \leq n_0,\ x_i \leq \overline{x} = 0$. L'erreur moyenne (écart moyen absolu des anglo-saxons) vaut $\sum_{i=1}^{n} p_i |\overline{x} - x_i|$.

[17] En reprenant les mêmes notations, le risque moyen linéaire s'écrit - $\sum_{i \leq n_0} p_i x_i$.

[18] Le risque de Tetens vaut donc $R = \sum_{i \leq n_0} p_i |\overline{x} - x_i|$.

[19] § 38. Sous réserve de précisions, les références concernent la *Dritte Abhandlung — Versuch über das Risico der Casse bey Versorgungsanstalten* de Tetens [1786].

[20] Moivre [1756], p. 4.

[21] Moivre [1730] est repris et développé dans Moivre [1756], « A method of approximating the Sum of Terms of the Binomial $(a+b)^n$ expanded into series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to experiments », pp. 243 sqq. Ce titre de Moivre est tel qu'on peut se

demander à raison si ce n'est pas ce mathématicien qui est à l'origine de l'analogie remarquée chez Laplace et Tetens. Quelque tentante que soit cette hypothèse, il faut admettre que Moivre, s'il produit des développements analytiques incontestables (on parle de loi de *Moivre*-Laplace) reste dans une perspective très « bernoullienne ». Il n'est pas question d'inversion de la probabilité (et du théorème de Jacques Bernoulli), ni de dispersion, mais au contraire de convergence vers la moyenne, expression de la Providence : « *altho' Chance produces Irregularities, still the Odds will be infinitely great, that in process of Time, those Irregularities will bear no proportion to the recurrency of that Order which naturally results from* ORIGINAL DESIGN ».

22 Voir Pradier [1998], pp. 89 sqq. et 119 sqq.

23 Si on conserve l'hypothèse (valable pour les exemples) suivant laquelle $R =$ erreur moyenne, Tetens s'intéresse donc à l'intervalle $[\mu\text{-}R,\mu+R]$. Comme par ailleurs, l'erreur moyenne vaut 0,8 fois l'écart-type, c'est-à-dire :

$[\mu\text{-R},\mu+\text{R}] = [\mu\text{-}0{,}8\cdot\sigma,\mu+0{,}8\cdot\sigma]$, où σ désigne l'écart-type. On peut évidemment calculer cette probabilité à l'aide d'une table de la fonction de répartition de la loi normale. On obtient 0,5762 (pour la probabilité qu'une normale centrée réduite soit comprise dans un intervalle bilatéral de 0,8 fois l'écart-type autour de la moyenne). On est donc loin de la certitude morale.

24 Voir Pradier [1998]. On peut cependant noter les deux traits fondamentaux : d'abord Tetens réduit l'issue des rentes viagères à un schéma binaire (soit le souscripteur meurt au jour de la souscription, soit il jouit de sa rente jusqu'à la fin de la table) qui laisse l'espérance inchangée ; ensuite il approche le risque de la somme des rentes, identifiée à une binomiale en usant de la formule de Stirling *version Moivre*.

25 A ceci près, comme le rappelle Crépel [1988], que l'assuré a disparu des préoccupations savantes ; en outre Laplace ne cite pas Condorcet : cette négligence était courante au XVIII^e siècle.

26 La prise en compte de variables multinomiales permet de rendre compte des *rentes viagères*, dont l'issue ne peut être réduit à un succès ou un échec, puisque la durée de vie potentielle du rentier est comprise dans un intervalle en général assez important (on ne souscrit pas une rente viagère au seuil de la vieillesse). Afin de simplifier les calculs, Laplace considère un « ajustement analytique » des tables mortalité, par exemple, il choisit de prendre le rapport entre le nombre de vivants d'âge x (y_x) et la cohorte de départ (y_0) comme étant égal à $1-\frac{x}{n}$ où n est l'âge au décès du dernier survivant. Ceci revient à considérer une décroissance linéaire de la population, c'est « l'hypothèse de Moivre » [1725] comme on l'appelle dans la littérature actuarielle, voir par exemple Bohlmann-Poterin [1911], p. 508. Grâce à ces hypothèses, il peut étendre ses calculs aux cas des rentes sur plusieurs têtes ([1812], pp. 436-7).

[27] En particulier, Laplace [1812] p. 439 justifie le chargement des rentes : « J'observerai seulement que tous ces établissements doivent, pour prospérer, *se réserver un bénéfice* [n. i.] et multiplier considérablement leurs affaires, afin que, leur bénéfice réel devenant presque certain, ils soient exposés le moins du monde à de grandes pertes qui pourraient les détruire ». L'auteur conclut p. 440 : « ainsi, dans le cas d'un nombre infini d'affaires, le bénéfice réel de l'établissement devient *certain et infini* [n. i.]. Mais alors ceux qui traitent avec lui ont un désavantage mathématique qui doit être compensé par un avantage moral, dont l'appréciation va être l'objet du chapitre suivant [de l'espérance morale] ».

[28] Le terme est évidemment anachronique, mais la méthode de Laplace est tout à fait applicable à l'heure actuelle. Les deux différences avec la façon moderne de procéder à la construction des tests d'hypothèse sont les suivantes : d'abord Laplace utilise une approximation analytique et non un théorème de convergence probabiliste (ce qui lui permet d'additionner des variables suivant des lois différentes), ensuite il approche les sommes de variables par la loi qui porte son nom, alors qu'aujourd'hui on utilise un normale centrée réduite (la loi de Laplace a un écart-type de $\frac{1}{2}$). De façon générale, la pertinence des travaux de Laplace sur l'estimation a justifié l'intérêt des statisticiens contemporains comme Cochran [1977], pp. 158-60, [1978], ou bien sûr Bru [1988].

[29] Voir Bru [1988], en particulier les notes 101 et 105, pp. 37-8.

[30] Il s'agit d'une fonction bêta, c'est-à-dire une fonction de la forme $B(p,q)=\int_0^1 x^{q+1}(1-x)^{p+1}dx$. Euler [1781] en a réalisé l'étude détaillée (publiée en 1794), c'est pourquoi Legendre parlait à son propos d'intégrale d'Euler du premier type.

[31] Cette opinion peut sembler polémique dans la mesure où elle constitue un contre-exemple à la thèse d'Israël [1996], mais ce contre-exemple est pour l'heure bien isolé.

[32] Voir Boussard [1969].

[33] Le théorème de Bienaymé–Tchébycheff permet d'écrire que la probabilité de s'écarter de la moyenne est inférieure à une fraction de la variance, ainsi pour une variable *X* de moyenne *m* et une distance *d*, le théorème donne :

$P(|x-m| \geq d) \leq \frac{\sigma^2}{d^2}$. Minimiser la probabilité que le rendement soit plus faible qu'un seuil donné revient donc à minimiser la variance du portefeuille pour un rendement donné, comme le fait Roy [1952].

[34] Il existe une littérature très importante dans ce domaine dont le statut est problématique, voir sur ce point Pradier [1998], pp. 231-4.

[35] Il convient d'observer que

[36] Hazell [1971], pp. 51 écrit : « dans certaines circonstances, le fermier peut disposer de valeurs subjectives des paramètres, et préférer fonder ses décisions sur ces évaluations subjectives. Cependant, ce type d'information est difficile à obtenir pour une activité complexe, et il semble difficile que la matrice des variances-convariances soit complètement spécifiée. »

[37] Hazell [1971], p. 56 n. : « les programmes [informatiques] disponibles souffrent sévèrement des erreurs d'arrondis ». Hazell cite également le problème des matrices singulières.

[38] Hazell [1971], p. 57 : « ceci [la minimisation de l'écart moyen] peut être aisément réalisé en suivant le modèle de la programmation linéaire ».

[39] *Ibid.*, pp. 59-60.

[40] Cette expression permet de désigner rapidement les modèles reposant sur le principe de probabilité raisonnable de Condorcet : *safety-first* au sens de Roy, *espérance-variance* de Markowitz (et les généralisations à des moments plus nombreux), *MOTAD* de Hazell, etc.

[41] La théorie de l'espérance d'utilité représente les choix risqués comme l'application d'une fonction de décision aux perspectives aléatoires, pour lesquelles on calcule donc la quantité $\sum_{i=1}^{n} p_i u(W + x_i)$ où W représente le niveau de richesse de l'agent et la variable aléatoire X est décrite par la famille (p_i, x_i) de probabilités associés à des valeurs. Bien qu'elle s'exprime par une fonction de décision apparemment identique à Bernoulli [1731], la théorie de l'espérance d'utilité repose sur des fondements différents ; en particulier la fonction u peut être distinguée de la fonction d'utilité certaine pour la richesse (Bouyssou-Vansnick [1990]).

[42] Voir la polémique entre Marschak et Allais à l'occasion de l'intervention de Samuelson au colloque de Paris, Samuelson *et al.* [1952], pp. 151-3. Markowitz [1959], p. 287 reprend ce point de vue.

[43] L'*aversion absolue* pour le risque est le rapport $-\frac{u''(R)}{u'(R)}$, où u représente la fonction d'utilité et R le revenu de l'agent Voir Pratt [1964], p. 132. Elle permet d'évaluer la prime qu'un agent (maximateur d'espérance d'utilité) est prêt à payer pour se débarrasser d'un risque additif (c'est-à-dire une variable aléatoire qui s'ajoute au revenu) ; bref la somme qu'un individu est prêt à payer pour échanger la loterie $(R+X)$ contre la perspective $(R+E(X))$, où X est une variable aléatoire d'espérance nulle et R la richesse initiale de l'agent. Cette prime est à fort peu près égale à la moitié de la variance du risque multipliée par l'aversion absolue. Il semble évident

que, plus la richesse de l'agent est élevée, plus la prime est faible : l'aversion absolue devrait donc *décroître* avec la richesse.

[44] Voir par exemple Kroll - Levy - Markowitz [1984].

[45] C'est le cas dans la littérature de Markowitz [1958] à Baron [1977].

[46] Deux variables représentées par leur fonctions de répartition F et G respectent la condition de location et d'échelle s'il existe un couple de réels (α,β) (α positif) tels que pour tout x, $F(x)=G(\alpha x+\beta)$. Voir Meyer [1987].

[47] Fisher [1906], p. 406.