Le jeu du maximum

2018-2019

Élèves : *Raphaël LE GUILLOU ; Agal MAHAMAT AHMAT ; Rémi SIMONET (élèves de 3ème)*

Établissement : *Collège les Petits Ponts, Clamart (92)*

Professeur : *M. MARTIN*

Chercheur : *Josselin GARNIER, École Polytechnique*

1 Présentation du problème

Le jeu du maximum est un jeu de dés. Le but est d'obtenir avec un certain nombre de lancer de dés (cinq lancers initialement) le plus grand score possible (de 1 à 6). Pour cela il faut choisir à chaque lancer si on garde ou on relance sachant qu'au dernier lancer (s'il a lieu) il est obligatoire de garder le score affiché sur le dé. Pour être le plus performant à ce jeu, il faut avoir une stratégie.

Nous avons donc étudié ce jeu, et trouvé la stratégie optimale.

1) La recherche de stratégie

2.a) On lance des dés

Tout d'abord, nous (groupe de trois personnes) avons essayé de trouver la meilleure stratégie.

-La première stratégie essayée consiste à toujours garder 5 ou 6, mais à partir du 2ème lancer on garde 4 ou plus. La stratégie est donc la suivante :

-1er lancer: on garde seulement 5 ou 6

-2ème lancer : on garde 4 ; 5 ou 6

-3ème lancer : on garde 4 ; 5 ou 6

-4ème lancer : on garde 4 ; 5 ou 6

-5ème lancer : on garde tout

-Dans la seconde stratégie, si on obtient 5 ou 6 on garde le score tout le temps, si on obtient 1 ou 2 on relance le dé tout le temps et au quatrième lancer si on obtient 4 on le garde alors que sur les autres lancers on le rejoue.

-La troisième stratégie consiste, à chacun des lancers, à garder le 5 et le 6 et à relancer tout le reste. À partir du quatrième lancer on garde le 4.

Nous avons testé ces trois stratégies, en lançant des vrais dés et réalisé plusieurs séries de parties. Nous avons pu calculer la moyenne de nos résultats. Ensuite, nous avons mis en commun nos différentes moyennes pour essayer d'améliorer nos stratégies.

Sachant que «m» est la moyenne, voici les résultats obtenus :

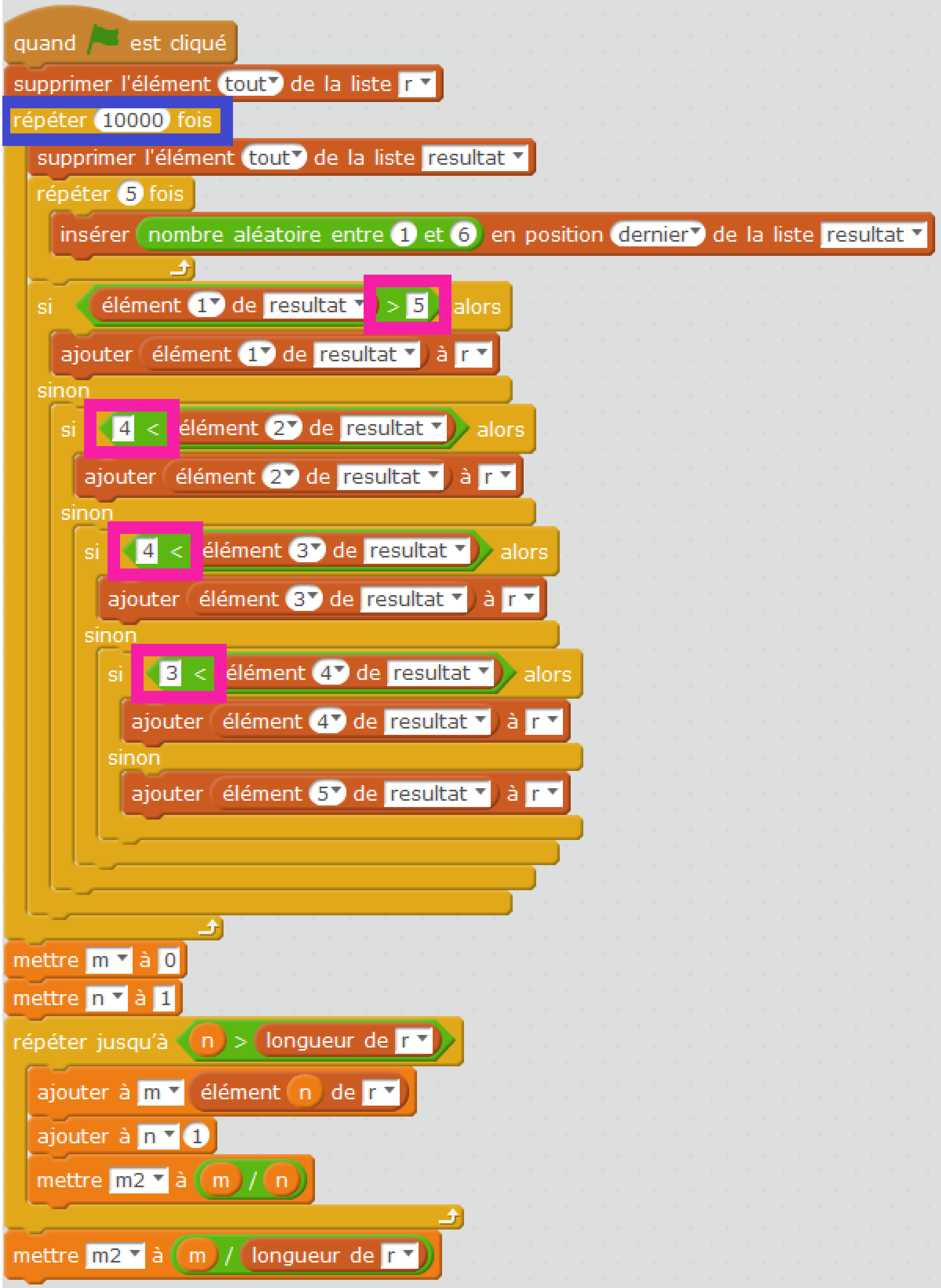
Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
m≈4,9 (pour 90 lancers)	m≈5,29 (pour 90 lancers)	m≈5,27 (pour 90 lancers)

Suite à ces expériences, nous avons remarqué que notre méthode était trop longue et pas assez précise.

2.b) On code le problème

Donc nous avons ensuite essayé de coder un programme sur le logiciel Scratch (un logiciel de programmation par blocs).

Cela nous permettait de calculer la moyenne de chaque stratégie plus rapidement et plus précisément (pour un grand nombre de parties).


quand est cliqué
supprimer l'élément tout de la liste r
répéter 10000 fois
supprimer l'élément tout de la liste resultat
répéter 5 fois
insérer nombre aléatoire entre 1 et 6 en position dernier de la liste resultat
si élément 1 de resultat > 5 alors
ajouter élément 1 de resultat à r
sinon
si 4 < élément 2 de resultat alors
ajouter élément 2 de resultat à r
sinon
si 4 < élément 3 de resultat alors
ajouter élément 3 de resultat à r
sinon
si 3 < élément 4 de resultat alors
ajouter élément 4 de resultat à r
sinon
ajouter élément 5 de resultat à r
mettre m à 0
mettre n à 1
répéter jusqu'à n > longueur de r
ajouter à m élément n de r
ajouter à n 1
mettre m2 à m / n
mettre m2 à m / longueur de r

Le programme fonctionne de la manière suivante :

1. Il effectue 5 lancers de dés. Par exemple : 2 – 5 – 3 – 4 – 6.
2. Il applique la stratégie choisie pour savoir quel nombre garder. Par exemple : Il ne gardera pas le 2, mais il va choisir le deuxième lancer (le 5), donc il ne prendra pas en compte les autres lancers (même si il y a un meilleur résultat).
3. Le programme effectue les étapes n°1 et 2 un grand nombre de fois.
4. Ensuite le programme calcule la moyenne des dés gardés en additionnant tous les scores et en divisant par le nombre de lancers.

On a essayé de trouver la meilleure stratégie en variant les différents paramètres. Par exemple, la case bleue sert à faire varier le nombre de parties jouées, ce qui a pour effet de rendre plus précis la moyenne mais cela dure plus longtemps.

Les cases roses servent à faire varier la stratégie. Dans l’exemple ci-dessus, les nombres dans les différentes cases roses varient selon la stratégie. Ces nombres donnent le nom de la stratégie, par exemple celle-ci est appelée la stratégie «5-4-4-3».

Voici les résultats obtenus :

Nom de la stratégie	5444	5443	4444	4443	4433	4333	3333
Moyenne pour 500 000 lancers	5,087006	5,119216	5,103942	5,129610	5,110848	5,042556	4,907086

Nous avons donc trouvé grâce au logiciel Scratch que la meilleure stratégie semblait être la stratégie «4-4-4-3» (qui correspond à la stratégie numéro 3 définie au début de l'article).

Il restait donc à le démontrer.

3) Démonstration

Tout d'abord nous avons essayé de partir du premier lancer jusqu'au dernier. Cela n'a pas été concluant du tout car nous avions des moyennes supérieures à 6, ce qui veut dire que nous avions dû commettre une erreur dans le raisonnement.

Nous avons donc décidé de simplifier l'expérience en ne considérant qu'un seul lancé au lieu de 5, la moyenne était donc de $\frac{\mathbf{1+2+3+4+5+6}}{\mathbf{6}} = \mathbf{3,5}$.

Nous avons ensuite considéré une expérience avec 2 lancers. Le deuxième lancer (le dernier lancer) aura une moyenne de 3,5 (voir ci-dessus).

Pour le premier lancer, nous avons les possibilités suivantes :

1	On ne garde pas ces scores et on relance car au prochain coup, on obtiendra en moyenne 3,5 (donc un meilleur résultat).
2	
3	
4	On garde ces scores car si on relance, la moyenne que l'on peut attendre est inférieure à ces résultats (3,5).
5	
6	

Dans le calcul de la moyenne au lieu de faire 1+2+3, on remplace chacun de ces nombres par 3,5.

La moyenne pour 2 lancers est donc $\frac{\mathbf{3,5+3,5+3,5+4+5+6}}{\mathbf{6}} = \mathbf{4,25}$.

De même pour une expérience à 3 lancers : les deux derniers lancers correspondent à l'expérience à deux lancers vue ci-dessus, et nous avons les possibilités suivantes pour le premier lancer.

1	On ne garde pas ces scores et on relance car au prochain coup, on obtiendra en moyenne 4,25 (donc un meilleur résultat).
2	
3	
4	
5	On garde ces scores car si on relance, la moyenne que l'on peut attendre est inférieure à ces résultats (4,25).
6	

Dans le calcul de la moyenne au lieu de faire 1+2+3+4, on remplace chacun de ces nombres par 4,25

La moyenne pour 3 lancers est donc $\frac{\mathbf{4\times4{,}25+5+6}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}} \simeq \mathbf{4{,}667}$.

De même pour une expérience à 4 lancers :

Les trois derniers lancers correspondent à l'expérience à trois lancers vue ci-dessus, et nous avons les possibilités suivantes pour le premier lancer.

1	On ne garde pas ces scores et on relance car au prochain coup, on obtiendra en moyenne $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}$(donc un meilleur résultat).
2	
3	
4	
5	On garde ces scores car si on relance, la moyenne que l'on peut attendre est inférieure à ces résultats ($\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}$).
6	

Dans le calcul de la moyenne au lieu de faire 1+2+3+4, on remplace chacun de ces nombres par $\frac{14}{3}$.

La moyenne pour 4 lancers est donc $\frac{\frac{4\times 14}{3}+5+6}{6} = \frac{89}{18} \simeq \mathbf{4{,}944}$.

De même pour une expérience à 5 lancers :

Les quatre derniers lancers correspondent à l'expérience à quatre lancers vue ci-dessus, et nous avons les possibilités suivantes pour le premier lancer.

<table>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">On ne garde pas ces scores et on relance car au prochain coup, on obtiendra en moyenne $\frac{89}{18}$(donc un meilleur résultat).</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">On garde ces scores car si on relance, la moyenne que l'on peut attendre est inférieure à ces résultats ($\frac{89}{18}$).</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
</table>

Dans le calcul de la moyenne au lieu de faire 1+2+3+4, on remplace chacun de ces nombres par $\frac{89}{18}$.

La moyenne pour 5 lancers est donc $\frac{\frac{4\times 89}{18}+5+6}{6} = \frac{277}{54} \simeq \mathbf{5{,}130}$.

Le calcul nous donne donc la stratégie optimale (ne garder les dés que s'ils sont supérieurs à la moyenne espérée aux lancers suivants) ainsi que la moyenne pour 5 lancers, qui est d'environ 5,13.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant qui sera expliqué plus en détail dans la partie 5) :

A chaque lancer en partant de la droite, on doit garder le chiffre s'il est en vert (donc supérieur à la moyenne qu'on peut espérer au lancer suivant).

Lancer n°	5	4	3	2	1
	1	3,5	4,25	4,6667	4,9444
	2	3,5	4,25	4,6667	4,9444
	3	3,5	4,25	4,6667	4,9444
	4	4	4,25	4,6667	4,9444
	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6
Moyenne	3,5	4,25	4,6667	4,9444	5,1296

4) Conclusion

On a donc démontré que la meilleure stratégie est celle que l'on a conjecturée grâce à l'algorithme (garder 5 et 6 puis le 4 à partir du quatrième lancer).

Pour obtenir la stratégie optimale, il est plus facile de commencer par le dernier lancer pour enfin arriver au premier, tout en calculant la moyenne à chaque lancer.

La méthode d'obtention de la stratégie optimale est donc la suivante :

À chaque lancer, on ne garde le dé que s'il est supérieur à la moyenne espérée aux lancers suivants.

Pour calculer cette moyenne, il faut commencer par calculer la moyenne du dernier lancer. Puis on calcule petit à petit la moyenne des lancers précédents, en remplaçant les dés que l'on ne garderait pas par la moyenne obtenue au lancer suivant.

On obtient donc petit à petit à la fois les moyennes et la stratégie optimale.

Cette méthode peut s'utiliser dans toutes les situations similaires et c'est ce que nous avons décidé de mettre en œuvre.

5) Ouverture

Nous avons voulu essayer de démontrer la stratégie optimale pour le même jeu, mais avec davantage de lancers et un dé possédant davantage de faces. Pour des raisons pratiques (la taille du tableau obtenu principalement), nous avons choisi de démontrer la stratégie optimale pour un dé à 40 faces et 20 lancers.

Nous avons utilisé le tableur en partant du dernier lancer. La première colonne contenait les résultats de 1 à 40 ainsi que la moyenne (20,5).

Ensuite pour la colonne suivante (le 19$^{\text{ème}}$ lancer) on a réécrit les nombres de 1 à 40 en remplaçant ceux qui étaient plus petits que la moyenne précédente (20,5) par la moyenne.

On a par exemple utilisé la formule suivante pour la cellule C13: =SI(B13<B$53;B$53;B13).

Elle compare le nombre précédent à la moyenne, écrit la moyenne si le nombre est inférieur et écrit le nombre précédent sinon.

Le symbole $ sert à ne pas faire glisser la moyenne vers le bas.

En étirant cette formule vers le bas puis vers la droite, on obtient les résultats pour les 20 lancers.

On peut donc, en s’intéressant aux nombres en vert, déterminer la stratégie optimale.

On pourrait faire de même quelque soit le nombre de faces et de lancers (tant que le tableur accepte de faire les calculs).

Voici ci-après le tableau obtenu (en 2 parties) :

Lancer n°	20	19	18	17	16	15	14	13	12
	1	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	2	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	3	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	4	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	5	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	6	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	7	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	8	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	9	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	10	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	11	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	12	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	13	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	14	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	15	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	16	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	17	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	18	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	19	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	20	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	21	21	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	22	22	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	23	23	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	24	24	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	25	25	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	26	26	26	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	27	27	27	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	28	28	28	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	29	29	29	29	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	30	30	30	30	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	31	31	31	31	31	31,5016	32,5137	33,311	33,9565
	32	32	32	32	32	32	32,5137	33,311	33,9565
	33	33	33	33	33	33	33	33,311	33,9565
	34	34	34	34	34	34	34	34	34
	35	35	35	35	35	35	35	35	35
	36	36	36	36	36	36	36	36	36
	37	37	37	37	37	37	37	37	37
	38	38	38	38	38	38	38	38	38
	39	39	39	39	39	39	39	39	39
	40	40	40	40	40	40	40	40	40
moyenne	20,5	25,5	28,3125	30,1688	31,5016	32,5137	33,311	33,9565	34,4892

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
34,4892	34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
35	35	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
36	36	36	36	36	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464
37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37,1464
38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38
39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
34,9408	35,3247	35,6591	35,9517	36,2077	36,437	36,6433	36,8289	36,996	37,1464	37,2855